Capítulo 1

La recta real

1.1. Axioma de Dedekind

La ponencia tiene por objeto exhibir la manera como incorporamos nuestra concepción intuitiva de *recta* a la definición axiomática de los números reales vía el Axioma de Dedekind (o alguno equivalente como el del supremo) y cómo de ahí podemos generar técnicas para demostrar propiedades de funciones continuas definidas en intervalos cerrados finitos que constituyen, al fin de cuentas, versiones de distinto tipo acerca de nuestra consideración de la recta como un *continuo* y que involucran ya el concepto de función y de continuidad.

La importancia de esta visión acerca de ciertas propiedades básicas radica en el hecho de presentar a los números reales más allá de un acartonado conjunto de axiomas.

Las propiedades de campo ordenado y arquimediano que caracterizan algebraicamente a los números reales nos aparecen claras y necesarias a partir del afán de obtener operaciones cerradas. Su descripción como el conjunto de todas las expansiones decimales (vamos a exceptuar las colas de nueves) la entendemos a partir de medir longitudes.

Sin embargo, la estructura algebraica de los racionales conforma también un campo ordenado, ¡denso! y arquimediano; es claro que podemos acercarnos tanto como queramos a la longitud de un segmento usando exclusivamente sucesiones de racionales.

La limitación de trabajar con los racionales se manifiesta al notar que no constituyen un *buen modelo* de la recta (no son suficientes para representar *cada* punto de la recta); y es que así definidos, los racionales tienen huecos mientras que nosotros concebimos a la recta como *continua*, sin huecos.

En términos formales podemos expresar esa *oquedad* de los racionales corroborando la posibilidad de *descomponerlos* en conjuntos A y B no vacíos, ajenos, cuya unión sea $\mathbb{Q}$ y tales que

$$a \in A \text{ y } b \in B \Rightarrow a < b,$$

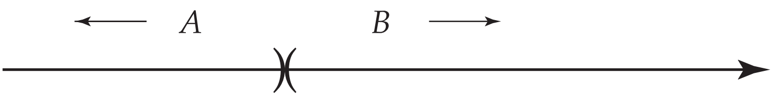

Figura 1.1 Cada elemento de A es menor que cada elemento de B.

con la propiedad de que A no tenga elemento máximo ni B tenga elemento mínimo. Por este procedimiento estaríamos localizando un *hueco*. En términos burdos, la *oquedad* en los racionales significa que si damos un tajo, un corte en la recta, podemos irnos *a través* sin tocar un racional.

Por ejemplo, si definimos el conjunto A como los racionales negativos, el cero y los racionales positivos de cuadrado menor que 2 y el conjunto B como los racionales positivos de cuadrado mayor que 2, será fácil corroborar que

$A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$; $a \in A$ y $b \in B \Rightarrow a < b$,

A no tiene elemento máximo y B no tiene elemento mínimo.

Insistiendo en considerar la recta como un *continuo*, si el procedimiento anterior caracteriza a los huecos, en nuestro afán de buscar un *buen modelo* para la recta podemos exigir de los reales, además, que donde demos *tajos* nos encontremos con algún real.

¡Esto es lo que está detrás del axioma de Dedekind! Enunciémoslo:

1.1. Axioma. (de DEDEKIND[1]) *Consideremos los reales clasificados según dos conjuntos A y B, no vacíos, ajenos, cuya unión sea $\mathbb{R}$ y tales que*

$$a \in A \quad \text{y} \quad b \in B \;\Rightarrow\; a < b.$$

[1]"La más profunda y más importante de las propiedades fundamentales de los números reales", F. LANDAU.