Capítulo 1

Algo sobre $\mathbb{R}$

1.1. Desigualdades

En este párrafo estudiaremos la relación de orden $<$ definida entre números reales. Sabemos que si a y b son dos elementos de $\mathbb{R}$, $a < b$ quiere decir que el número a es menor que el número b. También podemos expresar esto diciendo que el número b es mayor que el número a escribiendo $b > a$. A menudo es útil usar las relaciones *mayor o igual que*, que se denota con $\geq$ y *menor o igual que*, que se denota con $\leq$. Así, $a < b$ se leerá: *a es menor que b*, y $b > a$ se leerá: *b es mayor que a*. Estas dos afirmaciones son equivalentes. Análogamente, $a \leq b$ se leerá: *a es menor o igual que b*, y $b \geq a$ se leerá: *b es mayor o igual que a*. Debemos recordar que la relación de orden $<$ se define cumpliendo los siguientes axiomas:

i) Si a y b son dos números reales cualesquiera se tiene que $a < b$ o $a = b$ o $b < a$. (Ley de la tricotomía).

ii) Si a, b y c son tres números reales tales que $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$. (Ley transitiva).

iii) Si a y b son números reales tales que $a < b$ y c es un número real arbitrario, entonces $a + c < b + c$.

iv) Si a y b son números reales tales que $a < b$ y c es un número real tal que $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Diremos que un número real a es *positivo* si $a > 0$ y *negativo* si $a < 0$. Diremos que dos números tienen el mismo signo si ambos son positivos o ambos son negativos. Dos números tendrán distinto signo si uno es positivo y el otro es negativo.

Hay varias propiedades de los números reales con ésta relación de orden $<$ que serán utilizadas en este folleto. La mayoría las enunciaremos, el lector debería intentar demostrarlas.

Propiedad 1 *Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.*

Demostración.

$$a < b \text{ y el axioma (iii) implican que } a + c < b + c, \tag{1.1}$$

$$c < d \text{ y el axioma (iii) implican que } b + c < b + d. \tag{1.2}$$

Las afirmaciones 1.1, 1.2 y la ley transitiva (axioma ii) implican que $a + c < b + d$. ♦

Propiedad 2 *Si $a < b$ entonces $-a > -b$.*

Propiedad 3 *Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.*

Demostración. Si $c < 0$ por la propiedad (2) $-c > -0$, es fácil demostrar que $-0 = 0$, tenemos por lo tanto que $-c > 0$. Entonces, $a < b$, $-c > 0$ y el axioma (iv) implican que $a(-c) < b(-c)$ o lo que es lo mismo $-(ac) < -(bc)$. Esta desigualdad y la propiedad (2) implican que $ac > bc$. ♦

Propiedad 4 *Si a es distinto de 0 entonces $a^2 > 0$.*

Propiedad 5 *Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.*

Propiedad 6 (Ley de los signos) *Si a y b tienen el mismo signo, entonces $ab > 0$. Si a y b tienen signos distintos, entonces $ab < 0$.*